

Umiejętność 2.16 - Usuwanie Sumy Niewymierności z Mianownika

Umiejętność wymaga: 1.12 1.16 1.17 2.12 2.14

Wprowadzenie do Usuwania Niewymierności z Mianownika

Usuwanie niewymierności z mianownika polega na przekształceniu wyrażenia zawierającego sumę lub różnicę z pierwiastkami w mianowniku tak, aby mianownik stał się liczbą wymierną. Jest to często stosowane w matematyce, aby uprościć wyrażenia i ułatwić dalsze obliczenia.

Kroki Usuwania Niewymierności z Mianownika

- **Krok 1:** Zidentyfikuj wyrażenie w mianowniku, które zawiera sumę lub różnicę z pierwiastkiem.
- **Krok 2:** Pomnóż licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika.
- **Krok 3:** Uprość wynikowe wyrażenie.

Sprzężenie

Sprzężenie wyrażenia $a + b\sqrt{c}$ to $a - b\sqrt{c}$. Analogicznie, sprzężeniem $a - b\sqrt{c}$ jest $a + b\sqrt{c}$.

Przykłady Usuwania Niewymierności z Mianownika

Przykład 1: Prosta suma z pierwiastkiem

Uprość wyrażenie $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

- **Krok 1:** Zidentyfikuj wyrażenie w mianowniku: $2 + \sqrt{3}$.
- **Krok 2:** Pomnóż licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika: $2 - \sqrt{3}$.

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$

- **Krok 3:** Uprość mianownik:

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

- **Wynik:**

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$$

Przykład 2: Złożona suma z pierwiastkiem

Uprość wyrażenie $\frac{3}{1-\sqrt{5}}$.

- **Krok 1:** Zidentyfikuj wyrażenie w mianowniku: $1 - \sqrt{5}$.
- **Krok 2:** Pomnóż licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika: $1 + \sqrt{5}$.

$$\frac{3}{1 - \sqrt{5}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}$$

- **Krok 3:** Uprość mianownik:

$$(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 1^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 - 5 = -4$$

- **Wynik:**

$$\frac{3(1 + \sqrt{5})}{-4} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{-4} = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

Przykład 3: Wyrażenie sumą pierwiastków

Uprość wyrażenie $\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

- **Krok 1:** Zidentyfikuj wyrażenie w mianowniku: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- **Krok 2:** Pomnóż licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika: $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

$$\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

- **Krok 3:** Uprość mianownik:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1$$

- **Wynik:**

$$\frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{-1} = -4(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

Zadanie 1

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{3}{2 + \sqrt{5}}$$

Zadanie 2

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}}$$

Zadanie 3

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Zadanie 4

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{7}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$$

Zadanie 5

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{2}{4 + \sqrt{7}}$$

Zadanie 6

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{5}{\sqrt{5} - 3}$$

Zadanie 7

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{6}{2 + \sqrt{3}}$$

Zadanie 8

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{9}{\sqrt{8} + \sqrt{2}}$$

Zadanie 9

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Zadanie 10

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{8}{5 + \sqrt{3}}$$

Zadanie 11

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$$

Zadanie 12

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{7}{3 + \sqrt{5}}$$

Zadanie 13

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 2}$$

Zadanie 14

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

Zadanie 15

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{5}{\sqrt{5} + 4}$$

Zadanie 16

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{7}{2 - \sqrt{2}}$$

Zadanie 17

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{3 + \sqrt{3}}$$

Zadanie 18

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$$

Zadanie 19

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

Zadanie 20

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{4}{\sqrt{2} - 1}$$

Odpowiedzi

Odpowiedź 1

$$\frac{3}{2 + \sqrt{5}} \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{3(2 - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{6 - 3\sqrt{5}}{4 - 5} = 3\sqrt{5} - 6$$

Odpowiedź 2

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{5(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{15 + 5\sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{15 + 5\sqrt{2}}{7}$$

Odpowiedź 3

$$\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Odpowiedź 4

$$\frac{7}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \frac{7(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3}$$

Odpowiedź 5

$$\frac{2}{4 + \sqrt{7}} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}} = \frac{2(4 - \sqrt{7})}{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{16 - 7} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{9}$$

Odpowiedź 6

$$\frac{5}{\sqrt{5} - 3} \cdot \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} + 3} = \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3)} = \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{5 - 9} = -\frac{5(\sqrt{5} + 3)}{4}$$

Odpowiedź 7

$$\frac{6}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{6(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 6(2 - \sqrt{3})$$

Odpowiedź 8

$$\frac{9}{\sqrt{8} + \sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiedź 9

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Odpowiedź 10

$$\frac{8}{5 + \sqrt{3}} \cdot \frac{5 - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}} = \frac{8(5 - \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \frac{8(5 - \sqrt{3})}{25 - 3} = \frac{8(5 - \sqrt{3})}{22} = \frac{4(5 - \sqrt{3})}{11}$$

Odpowiedź 11

$$\frac{3}{\sqrt{7} - 2} \cdot \frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{7 - 4} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{3} = \sqrt{7} + 2$$

Odpowiedź 12

$$\frac{7}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{4}$$

Odpowiedź 13

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 2} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{3 - 4} = -2(\sqrt{3} + 2)$$

Odpowiedź 14

$$\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Odpowiedź 15

$$\frac{5}{\sqrt{5} + 4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} - 4} = \frac{5(\sqrt{5} - 4)}{(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 4)} = \frac{5(\sqrt{5} - 4)}{5 - 16} = -\frac{5(\sqrt{5} - 4)}{11}$$

Odpowiedź 16

$$\frac{7}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{7(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{7(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{7(2+\sqrt{2})}{2}$$

Odpowiedź 17

$$\frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

Odpowiedź 18

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$$

Odpowiedź 19

$$\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

Odpowiedź 20

$$\frac{4}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 4(\sqrt{2}+1)$$